第6講　数列

1 ［1］ 初項2，初項から第 n 項までの和が15である等差数列 $\{a_k\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_k\}$ の第 k 項を n と k を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_k\}$ の初項から第 n 項までの項の中で負の数になるものの個数が6個であるとき，n の値を求めよ．

［2］(1) 10^n の正の約数（1と 10^n を含める）の中で 5^k で割り切れて 5^{k+1} で割り切れないものの総和を A_k とする．A_k を求めよ．ただし，n は正の整数，k は $0 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする．

(2) (1)の A_k を利用して，10^n の正の約数の総和 B_n を求めよ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$\{m_n\}$ を公比 r の等比数列とする．2 次関数 $y=x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる．各自然数 n に対し，点 P_n から点 P_{n+1} を順次，次のように定める．点 P_n を通り傾き m_n の直線を l_n とし，この直線と C とのもう一つの交点を P_{n+1} とする．ただし，C と l_n が接する場合は $\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{P}_n$ とする．点 P_n の x 座標を a_n とする．

(1)　a_{n+1} を a_n と m_n で表せ．

(2)　$(-1)^n a_n=b_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ．

(3)　$a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$ とする．このとき，ある 2 次関数 $y=bx^2$ があって，すべての自然数 n に対し直線 l_n がこの 2 次関数のグラフに接するとき，b を r で表せ．ただし，$m_1\neq 0$，$r\neq -1$，0 とする．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 曲線　$3x^2-y^2=-1$　……①　について次の問いに答えよ．

(1)　点 $(a,\ b)$ が①のグラフ上の点とすれば，$(2a+b,\ 3a+2b)$ もまた①のグラフ上の点であることを示せ．

(2)　n を正の整数とする．このとき $\sqrt{3}\,a+b=(2+\sqrt{3})^n$ を満たす整数 a，b をとれば，点 $(a,\ b)$ は①のグラフ上の点であることを示せ．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　数列

1　[1]　初項 2，初項から第 n 項までの和が 15 である等差数列 $\{a_k\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{a_k\}$ の第 k 項を n と k を用いて表せ．

(2)　数列 $\{a_k\}$ の初項から第 n 項までの項の中で負の数になるものの個数が 6 個であるとき，n の値を求めよ．

(1)　公差を d とすると　$\frac{n}{2}\{2+2+(n-1)d\}=15$

$n\{4+(n-1)d\}=30$　　$n(n-1)d=30-4n$　　よって　$d=\frac{30-4n}{n(n-1)}$

ゆえに　$\boldsymbol{a_k=2+(k-1)\cdot\frac{30-4n}{n(n-1)}}$

(2)　等差数列は単調増加または単調減少より，題意の 6 個の負の項は最初の 6 項，または最後の 6 項である．$a_1=2>0$ より最後の 6 項となる．

よって　$a_{n-6}\geqq 0$　……①　かつ　$a_{n-5}<0$　……②　であればよい．

①より　$2+\frac{(n-7)(30-4n)}{n(n-1)}\geqq 0$　　$n^2-28n+105\leqq 0$　　$14-\sqrt{91}\leqq n\leqq 14+\sqrt{91}$

②より　$2+\frac{(n-6)(30-4n)}{n(n-1)}<0$　　$n^2-26n+90>0$　　$n<13-\sqrt{79}$，$13+\sqrt{79}<n$

よって　$13+\sqrt{79}<n\leqq 14+\sqrt{91}$　　$\sqrt{79}=8.\cdots$，$\sqrt{91}=9.\cdots$ より

これを満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n=22}$**，23** のみ

1　[2](1)　10^n の正の約数（1 と 10^n を含める）の中で 5^k で割り切れて 5^{k+1} で割り切れないものの総和を A_k とする．A_k を求めよ．ただし，n は正の整数，k は $0\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする．

(2)　(1)の A_k を利用して，10^n の正の約数の総和 B_n を求めよ．

(1)　$10^n=(2\cdot 5)^n=2^n\cdot 5^n$ より

10^n の約数のうち題意を満たすものの和は　$2^0\cdot 5^k+2^1\cdot 5^k+2^2\cdot 5^k+\cdots+2^n\cdot 5^k$

ゆえに　$A_k=\frac{1\cdot(2^{n+1}-1)}{2-1}\cdot 5^k=\boldsymbol{(2^{n+1}-1)\cdot 5^k}$

(2)　$B_n=\sum_{k=0}^{n}A_k=(2^{n+1}-1)\sum_{k=0}^{n}5^k=(2^{n+1}-1)\cdot\frac{1\cdot(5^{n+1}-1)}{5-1}=\boldsymbol{\frac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 $\{m_n\}$ を公比 r の等比数列とする．2 次関数 $y=x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる．各自然数 n に対し，点 P_n から点 P_{n+1} を順次，次のように定める．点 P_n を通り傾き m_n の直線を l_n とし，この直線と C とのもう一つの交点を P_{n+1} とする．ただし，C と l_n が接する場合は $\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{P}_n$ とする．点 P_n の x 座標を a_n とする．

(1) a_{n+1} を a_n と m_n で表せ．

(2) $(-1)^n a_n=b_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ．

(3) $a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$ とする．このとき，ある 2 次関数 $y=bx^2$ があって，すべての自然数 n に対し直線 l_n がこの 2 次関数のグラフに接するとき，b を r で表せ．ただし，$m_1\neq 0$，$r\neq -1$，0 とする．

$m_n=m_1\cdot r^{n-1}$

(1) $l_n：y=m_n(x-a_n)+a_n{}^2=m_nx-m_na_n+a_n{}^2$

これと C との交点の x 座標は

$$x^2-m_nx+a_n(m_n-a_n)=0 \qquad (x-a_n)(x+a_n-m_n)=0 \qquad x=a_n,\ -a_n+m_n$$

ゆえに　$\boldsymbol{a_{n+1}=-a_n+m_n}$

(2) $(-1)^{n+1}a_{n+1}=(-1)^{n+1}\cdot(-1)\cdot a_n+(-1)^{n+1}\cdot m_1\cdot r^{n-1}=(-1)^n a_n+m_1(-r)^{n-1}$

よって　$(-1)^n a_n=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+m_1(-r)^{n-1}$，$b_1=-a_1$

したがって　$n\geqq 2$ のとき　$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}m_1(-r)^{k-1}$

ゆえに　$-r\neq 1$　つまり　**$\boldsymbol{r\neq-1}$ のとき**　$\boldsymbol{b_n=-a_1+\dfrac{m_1\{1-(-r)^{n-1}\}}{1+r}}$

$\boldsymbol{r=-1}$ のとき　$\boldsymbol{b_n=-a_1+m_1(n-1)}$

ともに，$n=1$ のときも成り立つ．

(3) $r\neq-1$，$a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$ より

$$a_n=(-1)^n\left[-\frac{m_1}{1+r}+\frac{m_1}{1+r}\{1-(-r)^{n-1}\}\right] \quad つまり \quad a_n=\frac{m_1r^{n-1}}{1+r}=\frac{m_n}{1+r}$$

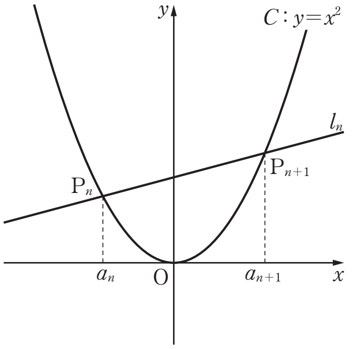
このとき，$y=bx^2$ と l_n の交点の x 座標は　$bx^2-m_nx+m_na_n-a_n{}^2=0$ の 2 解．

この式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}D&=m_n{}^2-4b(m_na_n-a_n{}^2)\\&=\{a_n(1+r)\}^2-4ba_n{}^2\{(1+r)-1\}\\&=\{(1+r)^2-4br\}a_n{}^2\end{aligned}$$

よって　$D=0$ となるのは　$a_n\neq 0$ より　$(1+r)^2-4br=0$

$r\neq 0$ より　$\boldsymbol{b=\dfrac{(1+r)^2}{4r}}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　曲線　$3x^2-y^2=-1$　……①　について次の問いに答えよ．

(1)　点 $(a,\ b)$ が①のグラフ上の点とすれば，$(2a+b,\ 3a+2b)$ もまた①のグラフ上の点であることを示せ．

(2)　n を正の整数とする．このとき $\sqrt{3}\,a+b=(2+\sqrt{3})^n$ を満たす整数 a，b をとれば，点 $(a,\ b)$ は①のグラフ上の点であることを示せ．

(1)　$(a,\ b)$ が①上の点のとき　$3a^2-b^2=-1$

$$3(2a+b)^2-(3a+2b)^2=3(4a^2+4ab+b^2)-(9a^2+12ab+4b^2)$$
$$=3a^2-b^2=-1$$

よって　$(2a+b,\ 3a+2b)$ も①上の点である．

(2)　$\sqrt{3}\,a+b=(2+\sqrt{3})^n$

$n=1$ のとき　$b+\sqrt{3}\,a=2+\sqrt{3}$　これを満たす整数 a，b は　$a=1$，$b=2$

$(1,\ 2)$ は①上の点より　$n=1$ のとき成り立つ．

$n=k$ のとき

$\sqrt{3}\,a_k+b_k=(2+\sqrt{3})^k$ を満たす整数 a_k，b_k をとれば $(a_k,\ b_k)$ は①上の点，すなわち $3{a_k}^2-{b_k}^2=-1$ を満たすと仮定すると，(1)より $(2a_k+b_k,\ 3a_k+2b_k)$ も①上の点である．

このとき　$\sqrt{3}\,a_{k+1}+b_{k+1}=(2+\sqrt{3})^{k+1}$
$$=(2+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k$$
$$=(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}\,a_k+b_k)$$
$$=(3a_k+2b_k)+\sqrt{3}\,(2a_k+b_k)$$

これを満たす整数 a_{k+1}，b_{k+1} は　$a_{k+1}=2a_k+b_k$，$b_{k+1}=3a_k+2b_k$　である．

よって，$(a_{k+1},\ b_{k+1})$ は①上にある．したがって　$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上より，すべての自然数 n で題意を満たす．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　xy 平面上の曲線 $y=x^2$ を C とする．点 $\mathrm{P}_0(2,\ 4)$ における C の接線が直線 $y=2$ と交わる点を $\mathrm{Q}_1(a_1,\ 2)$ とする．次に，点 $\mathrm{P}_1(a_1,\ a_1{}^2)$ における C の接線が直線 $y=a_1$ と交わる点を $\mathrm{Q}_2(a_2,\ a_1)$ とする．以下同様に，点 $(a_n,\ a_n{}^2)$ を P_n とし，P_n における C の接線が $y=a_n$ と交わる点を $\mathrm{Q}_{n+1}(a_{n+1},\ a_n)$ として，P_2，Q_3，P_3，Q_4，…… を定める．次の問いに答えよ．

(1)　a_1 を求めよ．

(2)　a_n を n の式で表せ．

(3)　線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_{n+1}$，線分 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$，および C で囲まれる部分の面積を n の式で表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　n は 2 以上の整数であり，$\frac{1}{2}<a_j<1$（$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）とする．このとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成り立つことを示せ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　xy 平面上の曲線 $y=x^2$ を C とする．点 $P_0(2,\ 4)$ における C の接線が直線 $y=2$ と交わる点を $Q_1(a_1,\ 2)$ とする．次に，点 $P_1(a_1,\ a_1{}^2)$ における C の接線が直線 $y=a_1$ と交わる点を $Q_2(a_2,\ a_1)$ とする．以下同様に，点 $(a_n,\ a_n{}^2)$ を P_n とし，P_n における C の接線が $y=a_n$ と交わる点を $Q_{n+1}(a_{n+1},\ a_n)$ として，P_2，Q_3，P_3，Q_4，…… を定める．次の問いに答えよ．

(1)　a_1 を求めよ．

(2)　a_n を n の式で表せ．

(3)　線分 P_nQ_{n+1}，線分 $P_{n+1}Q_{n+1}$，および C で囲まれる部分の面積を n の式で表せ．

(1)　$C：y=x^2$ より　$y'=2x$　　よって　$P_0(x=2)$ における C の接線の方程式は

$y=4(x-2)+4$　つまり　$y=4x-4$　　これと $y=2$ との交点の x 座標は　$x=\dfrac{3}{2}$

これが Q_1 の x 座標 a_1 であることより　$\boldsymbol{a_1=\dfrac{3}{2}}$

(2)　P_n　$(x=a_n)$　における C の接線の方程式は

$y=2a_n(x-a_n)+a_n{}^2$　つまり　$y=2a_nx-a_n{}^2$

これと $y=a_n$ との交点の x 座標は　$a_n=2a_nx-a_n{}^2$　　$a_n\neq 0$ より　$x_n=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$

これが Q_{n+1} の x 座標 a_{n+1} であることより　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$

つまり　$a_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$，$a_1-1=\dfrac{1}{2}$　より　$a_n-1=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ゆえに　$\boldsymbol{a_n=1+\dfrac{1}{2^n}}$

(3)　Q_{n+1} の y 座標が P_n の x 座標であることより，右図から

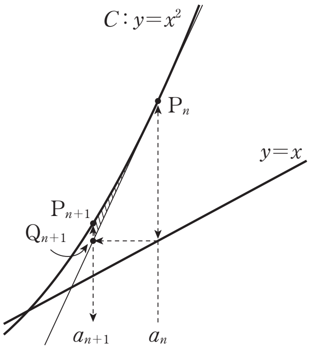
$0<a_{n+1}<a_n$　である．

よって，求める面積は

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n}\{x^2-(2a_nx-a_n{}^2)\}dx=\int_{a_{n+1}}^{a_n}(x-a_n)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a_n)^3\right]_{a_{n+1}}^{a_n}=\frac{1}{3}(a_n-a_{n+1})^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)^3=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{3\cdot 8^{n+1}}}$$



まず問題から「流れ」を把握することが必要である．どのような「動き」をもって問題が成り立っているのかを掴むことで，それに基づいて漸化式をたてることができる．特に(3)においてはその動きがわかることが必要である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> **2**　n は2以上の整数であり，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$（$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$）とする．このとき，不等式
>
> $$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)\quad\cdots\cdots(※)$$
>
> が成り立つことを示せ．

［Ⅰ］　$n=2$ のとき

$$(1-a_1)(1-a_2)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)\right\}=a_1a_2-\frac{a_2}{2}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)>0\qquad\left(\frac{1}{2}<a_1,\ a_2<1\ より\right)$$

よって，$n=2$ のときに(※)は成り立つ．

［Ⅱ］　$n=k$ のときに(※)が成り立つと仮定する．

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)$$

ここで

この置き換えは，いたずらに答案が助長するのを防ぐため．

$(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)=A_k$，　$a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{a_k}{2^{k-1}}=B_k$ とおくと，

この仮定は　$A_k>1-B_k$　と表される．

このとき　$A_{k+1}=A_k\cdot(1-a_{k+1})=A_k-a_{k+1}A_k>1-B_k-a_{k+1}A_k=1-(B_k+a_{k+1}A_k)$

目的の形を頭に浮かべ，仮定を用いてまず部分的に下げた．

ここで

$B_{k+1}-(B_k+a_{k+1}A_k)$

$=\dfrac{a_{k+1}}{2^k}-a_{k+1}A_k$

$=a_{k+1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k-a_{k+1}(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)$

$=a_{k+1}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^k-(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)\right\}$　……①

ここで　$\dfrac{1}{2}<a_i<1$ より　$\dfrac{1}{2}>1-a_i>0$（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$）

であるから　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^k>(1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k)$

$a_{n+1}>0$ より　(①)>0

$B_k+a_{k+1}A_k<B_{k+1}$　　つまり　$1-(B_k+a_{k+1}A_k)>1-B_{k+1}$

よって，$A_{k+1}>1-B_{k+1}$　となり，$n=k+1$ のときも(※)は成り立つ．

［Ⅰ］，［Ⅱ］より，$n\geqq 2$ のすべての自然数 n で(※)が成り立つ．

数学的帰納法である．第 k 項が成り立つと仮定し，それを用いればすぐに第 $(k+1)$ 項が成り立つほど不等式型の帰納法は甘くはないことは周知の事実であろう．「差をとること」が必要である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。